行列式按行 (列) 展开

林胤榜

2023 年 10 月 8 日

主要内容

行列式按行 (列) 展开

目标: 将高阶行列式的计算化为低阶行列式的计算.

想法

将复杂的问题转化成简单 (或者已知) 的问题.

定义

给定一 n 阶行列式, 把 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列删除, 留下的 $(n-1)$ 阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**, 记作 M_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称为 a_{ij} 的**代数余子式**.

例子

在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中, a_{12} 的余子式是

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

代数余子式是 $(-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$.

注意到, 代数余子式和余子式所差的符号交错变化.

引理

假设 n 阶行列式 D 的第 i 行除了 (i,j) 元 a_{ij} 外均为 0, 则 $D=a_{ij}A_{ij}$, 其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

类似结论对列也成立.

证明. (借此机会回顾行列式的性质.)

若 $(i,j)=(1,1)$,

$$D=\left|\begin{array}{c:cccc} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|$$

由之前的例子, $D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}=a_{11}A_{11}.$

下面考虑一般情形: (将 a_{ij} 移到左上角.)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&=(-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{(\text{删除第 i 行第 j 列})} \\
&= a_{ij} A_{ij}.
\end{aligned}
$$

$\square$

定理

对任一 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

有

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

同样地,

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

其中 $i, j = 1, \ldots, n$.

回顾二三阶的情形.

证明.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{归纳}}{=\!=\!=} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}. \qquad \square$$

这里, 我们将问题化成已知情形.

例子

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

例子 (范德蒙德行列式)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

证明. (利用数学归纳法.)

当 $n = 2$ 时, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$ 成立.

假设结论对 $n-1$ 成立.

$$D_n \xlongequal[r_2 - x_1 r_1]{\substack{r_n - x_1 r_{n-1} \\ r_{n-1} - x_1 r_{n-2} \\ \cdots}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{归纳假设}} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \prod_{n\geq i>j\geq 2} (x_i - x_j)$$

$$= \prod_{n\geq i>j\geq 1} (x_i - x_j).$$

结论对 n 亦成立, 由数学归纳法得证. $\square$

推论

行列式某一行 (列) 的元素与另一行 (列) 的对应元素的代数余子式乘积之和为 0, 即当 $i \neq j$ 时,

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

同样地,

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0.$$

更具体的写出.

证明.

考虑行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 以第 i 行替换第 j 行其余不变,

得到行列式

$$\boxed{D' =} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(j-1)1} & \cdots & a_{(j-1)n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{(j+1)1} & \cdots & a_{(j+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{以第 j 行展开}} a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}.$$

另外, 由于第 i 行与第 j 行相同, $D' = 0$. □

例子